Liczby i wyrażenia

poziom podstawowy

Potęgi

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $(ab)^n = a^n b^n$

$a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ $(a \geq 0)$

Pierwiastki

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $(a, b \geq 0)$

$\sqrt{a^2} = |a|$

Wyłączanie: $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

Usuwanie niewymierności: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logarytmy

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0)$

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$

$\log x$ oznacza $\log_{10} x$

Procenty

p% liczby a: $\frac{p}{100} \cdot a$

Podwyżka o p%: $a \cdot (1 + \frac{p}{100})$

Obniżka o p%: $a \cdot (1 - \frac{p}{100})$

Uwaga: −20%, potem +20% to **nie** powrót do ceny ($0{,}8 \cdot 1{,}2 = 0{,}96$).

Wzory skróconego mnożenia

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Wartość bezwzględna

$|x| = x$ dla $x \geq 0$, $|x| = -x$ dla $x < 0$

$|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$

$|x - a| \geq r \Leftrightarrow x \leq a - r$ lub $x \geq a + r$

$|x - a|$ to odległość x od a na osi.

Funkcje, równania, nierówności

poziom podstawowy

Funkcja liniowa y = ax + b

a – współczynnik kierunkowy, b – punkt przecięcia z osią Oy.

a > 0 rosnąca, a < 0 malejąca, a = 0 stała.

Miejsce zerowe: $x_0 = -\frac{b}{a}$

Przez punkty A i B: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Funkcja kwadratowa

Ogólna: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Kanoniczna: $f(x) = a(x - p)^2 + q$, $W = (p, q)$

$p = \frac{-b}{2a}$, $q = \frac{-\Delta}{4a}$

Iloczynowa: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Oś symetrii: $x = p = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Delta i pierwiastki

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0$: $x_0 = \frac{-b}{2a}$ $\Delta < 0$: brak pierwiastków

Wzory Viète'a: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Nierówność kwadratowa – metoda

1. Oblicz pierwiastki (Δ lub postać iloczynowa).
2. Naszkicuj parabolę: a > 0 ramiona w górę, a < 0 w dół.
3. Odczytaj, gdzie wykres jest nad osią (> 0) lub pod nią (< 0).
4. Przy ≤ / ≥ końce przedziałów należą do zbioru.

Równanie wielomianowe – metoda

Grupuj wyrazy: $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = x^2(x - 4) - 9(x - 4)$.

Wyłącz wspólny czynnik, rozłóż $a^2 - b^2$.

Iloczyn = 0 ⇔ któryś czynnik = 0.

Największa i najmniejsza wartość w przedziale

Sprawdź, czy p należy do przedziału.

Policz f(p) oraz wartości na końcach przedziału.

Wybierz największą i najmniejszą z tych liczb.

Ciągi, trygonometria, planimetria

poziom podstawowy

Ciąg arytmetyczny

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$

Środkowy z trzech: $b = \frac{a + c}{2}$

Ciąg geometryczny

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ $(q \neq 1)$

Środkowy z trzech: $b^2 = a \cdot c$

Trygonometria w trójkącie prostokątnym

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

Wartości dla kątów 30°, 45°, 60°

α	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Trójkąty

Pitagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

$P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$

Równoboczny: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Suma kątów n-kąta: $(n - 2) \cdot 180°$

Czworokąty i koło

Romb: $P = \frac{1}{2} d_1 d_2$; trapez: $P = \frac{1}{2}(a + b)h$

Koło: $P = \pi r^2$, obwód $2\pi r$

Kąt wpisany = ½ kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

Geometria, bryły, statystyka

poziom podstawowy

Geometria analityczna

$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Środek odcinka: $S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

Proste równoległe: $a_1 = a_2$

Prostopadłe: $a_1 \cdot a_2 = -1$

Okrąg: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Pole trójkąta ze współrzędnych

Dla wektorów $AB = [u_1, u_2]$ i $AC = [v_1, v_2]$:

$P = \frac{1}{2}|u_1v_2 - u_2v_1|$

Symetralna AB: przechodzi przez środek AB, prostopadle do AB.

Bryły

Prostopadłościan: $V = abc$, $P = 2(ab + bc + ac)$

Przekątna sześcianu: $a\sqrt{3}$

Ostrosłup: $V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$

Walec: $V = \pi r^2 H$; stożek: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$, $l^2 = r^2 + H^2$

Kula: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $P = 4\pi r^2$

Kombinatoryka

Reguła mnożenia: $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots$

Permutacje: $n!$ Wariacje z powtórzeniami: n^k

Bez powtórzeń: $n(n-1)\ldots(n-k+1)$

Kombinacje: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Prawdopodobieństwo

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ (zdarzenia jednakowo prawdopodobne)

$P(A') = 1 - P(A)$

Losowanie bez zwracania: $|\Omega| = n(n-1)$

Statystyka

Średnia: suma / liczba danych

Mediana: środkowa liczba po uporządkowaniu (dla parzystej liczby danych – średnia dwóch środkowych)

Dominanta: wartość najczęstsza

Jak pisać rozwiązania zadań otwartych

- Zapisz, co obliczasz (np. „$\Delta = \ldots$”, „$|\Omega| = \ldots$”).
- Nie pomijaj kroku, za który jest punkt – kluczowy krok to często połowa punktów.
- Dowód kończ zdaniem: „co należało wykazać”.
- Na końcu napisz odpowiedź słowami i sprawdź jednostki.