Przykłady rozwiązane: równania

klasy 7–8

Cel: nauczyć nowej procedury tak, aby uczeń zrozumiał każdy krok, a nie tylko zapamiętał wynik; stopniowo przejść od pełnego wzoru do samodzielnego rozwiązywania.

Dlaczego to działa

Uczniowie, którzy dopiero poznają procedurę, uczą się szybciej, gdy najpierw analizują rozwiązany przykład, a dopiero potem rozwiązują podobne zadanie – zamiast od razu „walczyć" z zadaniem (efekt przykładu rozwiązanego, Sweller i Cooper 1985). Pokazywanie modeli i prowadzenie przez kroki to też jedna z zasad skutecznego nauczania Rosenshine'a. Każdy temat ma cztery części: **A** – przykład z opisanym każdym krokiem, **B** – zadanie bliźniacze z tymi samymi krokami, **C** – przykład z lukami (część kroków jest zrobiona), **D** – zadania samodzielne i ★. Uczciwie: korzyść z przykładów maleje u uczniów, którzy już biegle rozwiązują dany typ zadań – im daj od razu część D.

Jak prowadzić

1. Wyświetl lub omów część A. Poproś uczniów, by własnymi słowami powiedzieli, *dlaczego* wykonano dany krok (samowyjaśnianie).
2. Część B – uczniowie rozwiązują w parach lub samodzielnie, zapisując każdy krok w osobnym wierszu.
3. Część C – samodzielnie; sprawdzenie z kluczem. Część D – praca samodzielna lub zadanie domowe.
4. Jeden temat (dwie strony) = jedna lekcja. Tematy można przeplatać: po kilku dniach daj uczniom zadania D z różnych stron naraz.

Różnicowanie

- Uczniowie z trudnościami: częściej wracają do A, mogą korzystać z niej przy B i C.
- Uczniowie biegli: zaczynają od D i ★; mogą tworzyć własne zadania bliźniacze dla kolegów.
- Każdy krok ma podpis – uczeń uczy się słownictwa potrzebnego do opisu rozwiązania (przydatne przy zadaniach otwartych na sprawdzianach).

Źródła: Sweller i Cooper (1985), przykłady rozwiązane w nauce algebry, Cognition and Instruction 2(1); Rosenshine (2012), „Principles of Instruction", American Educator 36(1); Dunlosky i in. (2013), „Improving Students' Learning With Effective Learning Techniques", Psychological Science in the Public Interest 14(1). Opis metod: glowkowniadruk.pl/dla-nauczyciela/metody-potwierdzone-naukowo

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · KROK PO KROKU

1. Równania typu ax + b = c

klasy 7–8

A Przeczytaj przykład. Zwróć uwagę, co dzieje się w każdym kroku.

3x + 5 = 20

Przenoszę liczbę na prawą stronę	3x = 20 − 5
Porządkuję	3x = 15
Dzielę obie strony przez 3	x = 5
Sprawdzam	3 · 5 + 5 = 20 ✓

B Teraz ty – zrób to samo krok po kroku.

4x − 7 = 21

Przenoszę liczbę na prawą stronę	
Porządkuję	
Dzielę obie strony przez 4	
Sprawdzam	

Wskazówka: zapisuj każdy krok w osobnym wierszu – tak jak w przykładzie A. Gdy utkniesz, wróć do przykładu i sprawdź, co zrobiono w tym samym kroku.

? Wyjaśnij własnymi słowami: który krok jest najważniejszy i dlaczego?

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · ĆWICZENIE

1. Równania typu ax + b = c

klasy 7–8

C Dokończ – część kroków jest już zrobiona.

5x + 9 = 44

Przenoszę liczbę na prawą stronę	5x = 44 − 9
Porządkuję	5x = 35
Dzielę obie strony przez 5	
Sprawdzam	

D Samodzielnie (★ – wyzwanie). Rozwiąż w zeszycie lub obok.

1) 6x − 4 = 32

2) 2x + 11 = 3

★ 7 − 3x = 19

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · KROK PO KROKU

2. Niewiadoma po obu stronach

klasy 7–8

A Przeczytaj przykład. Zwróć uwagę, co dzieje się w każdym kroku.

5x − 3 = 2x + 12

Wyrazy z x na lewo, liczby na prawo	5x − 2x = 12 + 3
Porządkuję	3x = 15
Dzielę przez 3	x = 5
Sprawdzam	L = 22, P = 22 ✓

B Teraz ty – zrób to samo krok po kroku.

7x + 2 = 3x + 18

Wyrazy z x na lewo, liczby na prawo	
Porządkuję	
Dzielę przez 4	
Sprawdzam	

Wskazówka: zapisuj każdy krok w osobnym wierszu – tak jak w przykładzie A. Gdy utkniesz, wróć do przykładu i sprawdź, co zrobiono w tym samym kroku.

? Wyjaśnij własnymi słowami: który krok jest najważniejszy i dlaczego?

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · ĆWICZENIE

2. Niewiadoma po obu stronach

klasy 7–8

C Dokończ – część kroków jest już zrobiona.

6x – 5 = 4x + 9

Wyrazy z x na lewo, liczby na prawo	6x – 4x = 9 + 5
Porządkuję	2x = 14
Dzielę przez 2	
Sprawdzam	

D Samodzielnie (★ – wyzwanie). Rozwiąż w zeszycie lub obok.

1) 9x – 1 = 5x + 11

2) 3x + 8 = 7x – 4

★ 2(x + 3) = 5x – 9

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · KROK PO KROKU

3. Równania z nawiasami

klasy 7–8

A Przeczytaj przykład. Zwróć uwagę, co dzieje się w każdym kroku.

3(x − 2) + 4 = 19

Opuszczam nawias (mnożę każdy wyraz)	3x − 6 + 4 = 19
Porządkuję lewą stronę	3x − 2 = 19
Przenoszę i dzielę	3x = 21, x = 7
Sprawdzam	3 · 5 + 4 = 19 ✓

B Teraz ty – zrób to samo krok po kroku.

2(x + 5) − 3 = 15

Opuszczam nawias (mnożę każdy wyraz)	
Porządkuję lewą stronę	
Przenoszę i dzielę	
Sprawdzam	

Wskazówka: zapisuj każdy krok w osobnym wierszu – tak jak w przykładzie A. Gdy utkniesz, wróć do przykładu i sprawdź, co zrobiono w tym samym kroku.

? Wyjaśnij własnymi słowami: który krok jest najważniejszy i dlaczego?

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · ĆWICZENIE

3. Równania z nawiasami

klasy 7–8

C **Dokończ – część kroków jest już zrobiona.**

4(x − 1) + 2x = 26

Opuszczam nawias (mnożę każdy wyraz)	4x − 4 + 2x = 26
Porządkuję lewą stronę	6x − 4 = 26
Przenoszę i dzielę	
Sprawdzam	

D **Samodzielnie (★ – wyzwanie). Rozwiąż w zeszycie lub obok.**

1) 5(x + 1) − 2x = 17

2) 3(2x − 1) = 2(x + 5) + 3

★ 2(3x − 4) − (x + 2) = 15

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · KROK PO KROKU

4. Równania z ułamkami

klasy 7–8

A Przeczytaj przykład. Zwróć uwagę, co dzieje się w każdym kroku.

x/3 + 2 = 6

Przenoszę liczbę	x/3 = 4
Mnożę obie strony przez 3	x = 12
Sprawdzam	12/3 + 2 = 6 ✓

B Teraz ty – zrób to samo krok po kroku.

x/4 − 1 = 5

Przenoszę liczbę	
Mnożę obie strony przez 4	
Sprawdzam	

Wskazówka: zapisuj każdy krok w osobnym wierszu – tak jak w przykładzie A. Gdy utkniesz, wróć do przykładu i sprawdź, co zrobiono w tym samym kroku.

? Wyjaśnij własnymi słowami: który krok jest najważniejszy i dlaczego?

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · ĆWICZENIE

4. Równania z ułamkami

klasy 7–8

C Dokończ – część kroków jest już zrobiona.

(x + 2)/5 = 3

Mnożę obie strony przez 5	x + 2 = 15
Przenoszę liczbę	x = 13

Sprawdzam

D Samodzielnie (★ – wyzwanie). Rozwiąż w zeszycie lub obok.

1) 2x/3 = 8

2) x/2 + x/3 = 10

★ (x − 1)/2 = (x + 3)/4

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · KROK PO KROKU

5. Zadania tekstowe z równaniem

klasy 7–8

A Przeczytaj przykład. Zwróć uwagę, co dzieje się w każdym kroku.

Pomyślałem liczbę, pomnożyłem ją przez 3 i dodałem 7. Otrzymałem 34. Jaka to liczba?

Oznaczam niewiadomą	x – pomyślana liczba
Zapisuję równanie	$3x + 7 = 34$
Rozwiązuję	$3x = 27, \quad x = 9$
Odpowiedź i sprawdzenie	$9 \cdot 3 + 7 = 34$ ✓ – to liczba 9

B Teraz ty – zrób to samo krok po kroku.

Kasia ma o 5 lat więcej niż Ola. Razem mają 29 lat. Ile lat ma każda?

Oznaczam niewiadomą	
Zapisuję równanie	
Rozwiązuję	
Odpowiedź i sprawdzenie	

Wskazówka: zapisuj każdy krok w osobnym wierszu – tak jak w przykładzie A. Gdy utkniesz, wróć do przykładu i sprawdź, co zrobiono w tym samym kroku.

? Wyjaśnij własnymi słowami: który krok jest najważniejszy i dlaczego?

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · ĆWICZENIE

5. Zadania tekstowe z równaniem

klasy 7–8

C **Dokończ – część kroków jest już zrobiona.**

Obwód prostokąta wynosi 46 cm. Jeden bok jest o 5 cm dłuższy od drugiego. Oblicz długości boków.

Oznaczam niewiadomą	x – krótszy bok, x + 5 – dłuższy bok
Zapisuję równanie	2(x + x + 5) = 46
Rozwiązuję	
Odpowiedź i sprawdzenie	

D **Samodzielnie (★ – wyzwanie). Rozwiąż w zeszycie lub obok.**

1) Bilet dla dorosłego jest 3 razy droższy niż dla dziecka. Dwa bilety dla dorosłych i jeden dla dziecka kosztują 84 zł. Ile kosztuje każdy bilet?

2) Suma trzech kolejnych liczb naturalnych wynosi 72. Jakie to liczby?

★ Tata jest 4 razy starszy od syna. Za 6 lat będzie od niego 3 razy starszy. Ile lat ma każdy z nich teraz?

DLA NAUCZYCIELA · KLUCZ ODPOWIEDZI

Przykłady rozwiązane: równania

klasy 7–8

1. Równania typu ax + b = c – B: 4 · 7 − 7 = 21 ✓; C: 5 · 7 + 9 = 44 ✓; D: 1) x = 6; 2) x = −4; ★ x = −4

2. Niewiadoma po obu stronach – B: L = 30, P = 30 ✓; C: L = 37, P = 37 ✓; D: 1) x = 3; 2) x = 3; ★ x = 5

3. Równania z nawiasami – B: 2 · 9 − 3 = 15 ✓; C: 4 · 4 + 10 = 26 ✓; D: 1) x = 4; 2) x = 4; ★ x = 5

4. Równania z ułamkami – B: 24/4 − 1 = 5 ✓; C: 15/5 = 3 ✓; D: 1) x = 12; 2) x = 12; ★ x = 5

5. Zadania tekstowe z równaniem – B: Ola 12 lat, Kasia 17 lat; 12 + 17 = 29 ✓; C: boki 9 cm i 14 cm; 2 · 23 = 46 ✓; D: 1) dziecko 12 zł, dorosły 36 zł; 2) 23, 24, 25; ★ syn 12 lat, tata 48 lat

Najczęstsze błędy – na co patrzeć przy sprawdzaniu

- brak zmiany znaku przy przenoszeniu wyrazu na drugą stronę
- mnożenie przez liczbę przed nawiasem tylko pierwszego wyrazu: 3(x − 2) = 3x − 2
- minus przed nawiasem: −(x + 2) = −x + 2 zamiast −x − 2
- dzielenie tylko jednej strony równania
- w zadaniach tekstowych brak opisu niewiadomej i brak odpowiedzi słownej

Gdy błąd powtarza się u wielu uczniów, wróć do części A danego tematu i poproś ucznia, by na głos opisał krok, w którym pomylił się w swoim rozwiązaniu.