Przykłady rozwiązane: ułamki zwykłe

klasy 4–6

Cel: nauczyć nowej procedury tak, aby uczeń zrozumiał każdy krok, a nie tylko zapamiętał wynik; stopniowo przejść od pełnego wzoru do samodzielnego rozwiązywania.

Dlaczego to działa

Uczniowie, którzy dopiero poznają procedurę, uczą się szybciej, gdy najpierw analizują rozwiązany przykład, a dopiero potem rozwiązują podobne zadanie – zamiast od razu „walczyć" z zadaniem (efekt przykładu rozwiązanego, Sweller i Cooper 1985). Pokazywanie modeli i prowadzenie przez kroki to też jedna z zasad skutecznego nauczania Rosenshine'a. Każdy temat ma cztery części: **A** – przykład z opisanym każdym krokiem, **B** – zadanie bliźniacze z tymi samymi krokami, **C** – przykład z lukami (część kroków jest zrobiona), **D** – zadania samodzielne i ★. Uczciwie: korzyść z przykładów maleje u uczniów, którzy już biegle rozwiązują dany typ zadań – im daj od razu część D.

Jak prowadzić

1. Wyświetl lub omów część A. Poproś uczniów, by własnymi słowami powiedzieli, *dlaczego* wykonano dany krok (samowyjaśnianie).
2. Część B – uczniowie rozwiązują w parach lub samodzielnie, zapisując każdy krok w osobnym wierszu.
3. Część C – samodzielnie; sprawdzenie z kluczem. Część D – praca samodzielna lub zadanie domowe.
4. Jeden temat (dwie strony) = jedna lekcja. Tematy można przeplatać: po kilku dniach daj uczniom zadania D z różnych stron naraz.

Różnicowanie

- Uczniowie z trudnościami: częściej wracają do A, mogą korzystać z niej przy B i C.
- Uczniowie biegli: zaczynają od D i ★; mogą tworzyć własne zadania bliźniacze dla kolegów.
- Każdy krok ma podpis – uczeń uczy się słownictwa potrzebnego do opisu rozwiązania (przydatne przy zadaniach otwartych na sprawdzianach).

Źródła: Sweller i Cooper (1985), przykłady rozwiązane w nauce algebry, Cognition and Instruction 2(1); Rosenshine (2012), „Principles of Instruction", American Educator 36(1); Dunlosky i in. (2013), „Improving Students' Learning With Effective Learning Techniques", Psychological Science in the Public Interest 14(1). Opis metod: glowkowniadruk.pl/dla-nauczyciela/metody-potwierdzone-naukowo

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · KROK PO KROKU

1. Skracanie ułamków

klasy 4–6

A **Przeczytaj przykład. Zwróć uwagę, co dzieje się w każdym kroku.**

$\frac{18}{24}$ – skróć jak najbardziej.

Największy wspólny dzielnik licznika i mianownika	18 i 24 dzielą się przez 6
Dzielę licznik i mianownik przez 6	$18 : 6 = 3$, $24 : 6 = 4$
Wynik	$\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

B **Teraz ty – zrób to samo krok po kroku.**

$\frac{20}{30}$ – skróć jak najbardziej.

Największy wspólny dzielnik licznika i mianownika	
Dzielę licznik i mianownik przez 10	
Wynik	

Wskazówka: zapisuj każdy krok w osobnym wierszu – tak jak w przykładzie A. Gdy utkniesz, wróć do przykładu i sprawdź, co zrobiono w tym samym kroku.

? **Wyjaśnij własnymi słowami: który krok jest najważniejszy i dlaczego?**

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · ĆWICZENIE

1. Skracanie ułamków

klasy 4–6

C **Dokończ – część kroków jest już zrobiona.**

$\frac{12}{16}$ – skróć jak najbardziej.

Największy wspólny dzielnik licznika i mianownika	12 i 16 dzielą się przez 4
Dzielę licznik i mianownik przez 4	12 : 4 = 3, 16 : 4 = 4
Wynik	

D **Samodzielnie (★ – wyzwanie). Rozwiąż w zeszycie lub obok.**

1) $\frac{14}{21}$

2) $\frac{24}{36}$

★ $\frac{45}{60}$

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · KROK PO KROKU

2. Dodawanie ułamków o różnych mianownikach

klasy 4–6

A Przeczytaj przykład. Zwróć uwagę, co dzieje się w każdym kroku.

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

Wspólny mianownik	najmniejsza wspólna wielokrotność 3 i 4 to 12
Rozszerzam ułamki	$\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$
Dodaję liczniki	$\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$
Wynik (skrócony)	$\frac{7}{12}$

B Teraz ty – zrób to samo krok po kroku.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$

Wspólny mianownik

Rozszerzam ułamki

Dodaję liczniki

Wynik (skrócony)

Wskazówka: zapisuj każdy krok w osobnym wierszu – tak jak w przykładzie A. Gdy utkniesz, wróć do przykładu i sprawdź, co zrobiono w tym samym kroku.

? Wyjaśnij własnymi słowami: który krok jest najważniejszy i dlaczego?

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · ĆWICZENIE

2. Dodawanie ułamków o różnych mianownikach

klasy 4–6

C Dokończ – część kroków jest już zrobiona.

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$

Wspólny mianownik	najmniejsza wspólna wielokrotność 3 i 6 to 6
Rozszerzam ułamki	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, $\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$
Dodaję liczniki	
Wynik (skrócony)	

D Samodzielnie (★ – wyzwanie). Rozwiąż w zeszycie lub obok.

1) $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$

2) $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$

★ $1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3}$

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · KROK PO KROKU

3. Odejmowanie liczb mieszanych

klasy 4–6

A **Przeczytaj przykład. Zwróć uwagę, co dzieje się w każdym kroku.**

$3\frac{1}{4} - 1\frac{3}{4}$

Czy da się odjąć ułamki?	$\frac{1}{4}$ jest mniejsze od $\frac{3}{4}$ – „pożyczam” 1 całość
Zamieniam pierwszą liczbę	$3\frac{1}{4} = 2\frac{5}{4}$
Odejmuję całości i ułamki	$2 - 1 = 1$; $\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4}$
Wynik (skrócony)	$1\frac{1}{2}$

B **Teraz ty – zrób to samo krok po kroku.**

$4\frac{1}{5} - 2\frac{3}{5}$

Czy da się odjąć ułamki?	
Zamieniam pierwszą liczbę	
Odejmuję całości i ułamki	
Wynik (skrócony)	

Wskazówka: zapisuj każdy krok w osobnym wierszu – tak jak w przykładzie A. Gdy utkniesz, wróć do przykładu i sprawdź, co zrobiono w tym samym kroku.

? **Wyjaśnij własnymi słowami: który krok jest najważniejszy i dlaczego?**

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · ĆWICZENIE

3. Odejmowanie liczb mieszanych

klasy 4–6

C **Dokończ – część kroków jest już zrobiona.**

$5\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3}$

Czy da się odjąć ułamki?	$\frac{1}{3}$ jest mniejsze od $\frac{2}{3}$ – „pożyczam” 1 całość
Zamieniam pierwszą liczbę	$5\frac{1}{3} = 4\frac{4}{3}$
Odejmuję całości i ułamki	
Wynik (skrócony)	

D **Samodzielnie (★ – wyzwanie). Rozwiąż w zeszycie lub obok.**

1) $6\frac{1}{4} - 3\frac{3}{4}$

2) $3\frac{2}{7} - 1\frac{5}{7}$

★ $5 - 2\frac{3}{8}$

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · KROK PO KROKU

4. Mnożenie ułamków

klasy 4–6

A Przeczytaj przykład. Zwróć uwagę, co dzieje się w każdym kroku.

$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9}$

Skracam „na krzyż” (licznik z mianownikiem)	$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$
Mnożę licznik przez licznik, mianownik przez mianownik	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
Wynik	$\frac{1}{6}$

B Teraz ty – zrób to samo krok po kroku.

$\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10}$

Skracam „na krzyż” (licznik z mianownikiem)	
Mnożę licznik przez licznik, mianownik przez mianownik	
Wynik	

Wskazówka: zapisuj każdy krok w osobnym wierszu – tak jak w przykładzie A. Gdy utkniesz, wróć do przykładu i sprawdź, co zrobiono w tym samym kroku.

? Wyjaśnij własnymi słowami: który krok jest najważniejszy i dlaczego?

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · ĆWICZENIE

4. Mnożenie ułamków

klasy 4–6

C Dokończ – część kroków jest już zrobiona.

$2\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$

Zamieniam liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy	$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$
Skracam „na krzyż” (licznik z mianownikiem)	$\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5} \rightarrow \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1}$
Mnożę licznik przez licznik, mianownik przez mianownik	
Wynik	

D Samodzielnie (★ – wyzwanie). Rozwiąż w zeszycie lub obok.

1) $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{8}$

2) $1\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}$

★ $2\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · KROK PO KROKU

5. Dzielenie ułamków

klasy 4–6

A Przeczytaj przykład. Zwróć uwagę, co dzieje się w każdym kroku.

$\frac{3}{5} : \frac{9}{10}$

Zamieniam dzielenie na mnożenie przez odwrotność	$\frac{3}{5} : \frac{9}{10} = \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9}$
Mnożę (najpierw skracam)	$\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9} = \frac{30}{45}$
Wynik	$\frac{2}{3}$

B Teraz ty – zrób to samo krok po kroku.

$\frac{4}{7} : \frac{8}{21}$

Zamieniam dzielenie na mnożenie przez odwrotność	
Mnożę (najpierw skracam)	
Wynik	

Wskazówka: zapisuj każdy krok w osobnym wierszu – tak jak w przykładzie A. Gdy utkniesz, wróć do przykładu i sprawdź, co zrobiono w tym samym kroku.

? Wyjaśnij własnymi słowami: który krok jest najważniejszy i dlaczego?

5. Dzielenie ułamków

klasy 4–6

C Dokończ – część kroków jest już zrobiona.

$2\frac{1}{4} : \frac{3}{8}$

Zamieniam liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy	$2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$
Zamieniam dzielenie na mnożenie przez odwrotność	$\frac{9}{4} : \frac{3}{8} = \frac{9}{4} \cdot \frac{8}{3}$
Mnożę (najpierw skracam)	
Wynik	

D Samodzielnie (★ – wyzwanie). Rozwiąż w zeszycie lub obok.

1) $\frac{5}{6} : \frac{5}{12}$

2) $1\frac{1}{5} : \frac{3}{10}$

★ $3\frac{1}{3} : 2\frac{1}{2}$

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · KROK PO KROKU

6. Ułamek danej liczby

klasy 4–6

A **Przeczytaj przykład. Zwróć uwagę, co dzieje się w każdym kroku.**

$\frac{3}{4}$ z liczby 20

Dzielę liczbę na 4 równych części	$20 : 4 = 5$
Biorę 3 takie części	$5 \cdot 3 = 15$
Odpowiedź	$\frac{3}{4}$ z 20 to 15

B **Teraz ty – zrób to samo krok po kroku.**

$\frac{2}{5}$ z liczby 35

Dzielę liczbę na 5 równych części

Biorę 2 takie części

Odpowiedź

Wskazówka: zapisuj każdy krok w osobnym wierszu – tak jak w przykładzie A. Gdy utkniesz, wróć do przykładu i sprawdź, co zrobiono w tym samym kroku.

? **Wyjaśnij własnymi słowami: który krok jest najważniejszy i dlaczego?**

PRZYKŁAD ROZWIĄZANY · ĆWICZENIE

6. Ułamek danej liczby

klasy 4–6

C **Dokończ – część kroków jest już zrobiona.**

$\frac{5}{6}$ z liczby 42

Dzielę liczbę na 6 równych części	$42 : 6 = 7$
Biorę 5 takich części	$7 \cdot 5 = 35$

Odpowiedź

D **Samodzielnie (★ – wyzwanie). Rozwiąż w zeszycie lub obok.**

1) $\frac{3}{8}$ z 64

2) $\frac{2}{3}$ z 27

★ W klasie jest 28 uczniów, $\frac{3}{7}$ z nich to dziewczynki. Ilu jest chłopców?

DLA NAUCZYCIELA · KLUCZ ODPOWIEDZI

Przykłady rozwiązane: ułamki zwykłe

klasy 4–6

1. Skracanie ułamków – B: $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$; C: $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$; D: 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; ★ $\frac{3}{4}$

2. Dodawanie ułamków o różnych mianownikach – B: $\frac{7}{10}$; C: $\frac{5}{6}$; D: 1) $\frac{11}{12}$; 2) $\frac{11}{15}$; ★ $4\frac{1}{6}$

3. Odejmowanie liczb mieszanych – B: $1\frac{3}{5}$; C: $2\frac{2}{3}$; D: 1) $2\frac{1}{2}$; 2) $1\frac{4}{7}$; ★ $2\frac{5}{8}$

4. Mnożenie ułamków – B: $\frac{1}{4}$; C: 2; D: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; ★ 4

5. Dzielenie ułamków – B: $1\frac{1}{2}$; C: 6; D: 1) 2; 2) 4; ★ $1\frac{1}{3}$

6. Ułamek danej liczby – B: $\frac{2}{5}$ z 35 to 14; C: $\frac{5}{6}$ z 42 to 35; D: 1) 24; 2) 18; ★ 28 : 7 · 3 = 12 dziewczynek; 28 − 12 = 16 chłopców

Najczęstsze błędy – na co patrzeć przy sprawdzaniu

- dodawanie liczników i mianowników (1/3 + 1/4 = 2/7) – wróć do kroku „wspólny mianownik”
- brak skracania wyniku lub skracanie tylko licznika
- przy odejmowaniu liczb mieszanych odejmowanie „mniejszego od większego” w ułamkach (1/4 − 3/4 → 2/4)
- przy dzieleniu odwracanie pierwszego ułamka zamiast drugiego
- mnożenie liczby mieszanej bez zamiany na ułamek niewłaściwy (2 1/2 · 4/5 = 2 4/10)

Gdy błąd powtarza się u wielu uczniów, wróć do części A danego tematu i poproś ucznia, by na głos opisał krok, w którym pomylił się w swoim rozwiązaniu.